FEUILLE DE TD

Polynômes d'endomorphismes

2 décembre 2022

Exercice 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Trouver $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul tel que $P(A) = 0$.

Exercice 2. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes qui sont premiers entre eux. Existe-t-il $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P(A) = Q(A) = 0$?

Exercice 3. Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.
Trouver un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul tel que $P(J_n(\lambda)) = 0$.
• Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer $Q(J_n(\lambda))$ en fonction de $N = J_n(\lambda) - \lambda I_n$.

Exercice 4. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Soit $A_\sigma \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de permutation associée à σ : $A_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})$.
On écrit $\sigma = c_1 \cdot \ldots c_r$ la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoint.
Trouver deux polynômes P tels que $P(A_\sigma) = 0$.
Que peut-on dire sur le spectre de A_σ ?

Exercice 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer que $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ et calculer A^{-1}.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que l'on a u nilpotent si et seulement si pour tout $x \in E$ il existe $k \geq 1$ tel que $u^k(x) = 0$.
2. On suppose que $\chi_u(X) = X^n$.
   Montrer que u est nilpotent.
3. On suppose que $\chi_u(X) = X^n$. Montrer que $\chi_u(u) = u^n = 0$.

Exercice 7. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p.

1. Montrer que $I_n - B$ est inversible et exprimer son inverse.
2. Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
3. On pose
$$H = \{I_n + P(B)/P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$$
   Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$

Exercice 8. Soit E un ev de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E.
On pose $F_i = S_u(v_i)$ et $P_i(X) = \mu_{u_{F_i}}(X)$.
• Montrer que l'on a $\mu_u = ppcm(P_1, \dots, P_n)$.
• Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On pose A_σ la matrice de permutation associée à σ.
On écrit $\sigma = c_1 \circ \ldots \circ c_r$ la décomposition de σ en cycles à supports disjoints.
Déterminer μ_{A_σ}.
Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce polynôme est à racines simples.

Exercice 9. 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Déterminer μ_A.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   La matrice B est-elle diagonalisable ?
   Déterminer μ_B. (Indication : Poser $C = B - I$)

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Déterminer μ_A.
Montrer que pour toute suite récurrente $(X_n)_n \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ qui vérifie $X_{n+1} = AX_n$, la suite $(X_n)_n$ est bornée.

Exercice 11. Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.
Déterminer $\mu_{J_n(\lambda)}$.

Exercice 12. Soit $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ avec $u(P)(X) = P(X+1)$.
• Déterminer μ_u. (On pourra étudier $v = u - Id$).
• On se place maintenant sur $(\mathbb{Z}/2Z)_5[X]$, avec $v(P(X)) = P(X+1)$.
Déterminer μ_v.

Exercice 13.

1. Soit $M = \text{Diag}\,(A_1, \dots, A_r)$ une matrice diagonale par blocs, avec $A_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.
   Déterminer $\mu_M(X)$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{K})$.
   Montrer que l'on a $ppcm(\mu_A, \mu_B) \mid \mu_M$ et $\mu_M \mid \chi_A \chi_B$.
   Puis, montrer que l'on a $\mu_M \mid \mu_A \mu_B$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \vdots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure par blocs, avec $A_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.
   Montrer que l'on a $\mu_M \mid \Pi_{i=1}^r \mu_{A_i}$.
   Ces deux polynômes sont-ils toujours égaux / toujours distincts ?

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u. Montrer que v est un polynôme en u.
Déterminer la dimension de $Com(u) = \{w \in \mathcal{L}(E)$ tels que $wu = uw\}$.

Exercice 15. Soit E un e.v. de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Enoncer 3 propriétés du polynôme caractéristique.
2. Enoncer 3 propriétés du polynôme minimal.
3. Enoncer 2 propriétés des sous-espaces propres.
4. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux. Pour quels polynômes P le lemme des noyaux est-il intéressant ?
5. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \geq 1$ tels que $F = Ker((u - \lambda Id_E)^m) \neq \{0\}$. Que peut-on dire sur u_F ?

Exercice 16. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
• On suppose que μ_u n'est pas scindé ou n'est pas à racines simples.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
Donner un exemple. • On suppose que μ_u est scindé.
Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, on pose $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^n)$.
On note r_i la multiplicité de $(X - \lambda_i)$ dans μ_u. Donner une expression de F_i avec r_i.
Quel est le polynôme minimal de u_{F_i} ?
• On suppose que μ_u est scindé à racines simples.
Que vaut μ_u ? L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
• On suppose que χ_u est scindé à racines simples.
Que vaut μ_u ?

Exercice 17. Soit E un ev de dimension m. Soient $d, s \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que s est nilpotent.

1. On prend $d = \lambda Id_E$. Montrer que l'on a $ds = sd$, puis que $\chi_d = \chi_{d+s}$. (On pourra se servir de $\chi_s(X)$)
2. On suppose $ds = sd$. Pour $Spec(d) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, on pose $F_i = Ker(d - \lambda_i Id_E)$. Quelles sont les valeurs de $\chi_{d_{F_i}}$ et $\chi_{d_{F_i} + s_{F_i}}$?
3. On suppose d diagonalisable et $ds = sd$. Montrer que l'on a $\chi_d = \chi_{d+s}$.
4. Est-ce encore vrai si $ds \neq sd$? (Si oui, le montrer. Si non, trouver un contre-exemple.)

Exercice 18. Soit E un ev de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $S_u(x) = E$. Que peut-on dire sur μ_u ?
2. On suppose que u est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $E = S_u(x)$.

Exercice 19. Soit E un ev de dimension n. Soit $P \in \mathcal{K}[X]$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.

1. Déterminer $\chi_{P(g)}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\chi_{P(\lambda Id_E+g)} = (X - P(\lambda))^n$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. On pose $Spec(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.
   Déterminer $\chi_{P(u)}$. (On pourra utiliser $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$.)

Exercice 20. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Spec(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

1. Donner la valeur de μ_f. Appliquer le lemme des noyaux à μ_f et f.
2. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que f et g commutent.
3. En déduire que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres de g.
4. Combien y a-t-il alors d'endomorphismes $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h^2 = f$?

Exercice 21. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que les espaces $\mathrm{Ker}(u \circ (u - \mathrm{Id}))$ et $\mathrm{Ker}(u \circ (u + \mathrm{Id}))$ soient supplémentaires. Montrer que u est une symétrie vectorielle.

Exercice 22.
1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$ une décomposition en somme directe de E, avec F_i des sous-espaces stables par u.
   Montrer que u est diagonalisable si et seulement si les endomorphismes induits u_{F_i} sont diagonalisables.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A^2 est diagonalisable.
   Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$. (On pourra utiliser la première question)
3. Trouver un contre-exemple dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $k \geq 2$. Montrer que $Ker(A^k) = Ker(A)$ si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.
5. On suppose maintenant qu'il existe $k \geq 2$ tel que A^k est diagonalisable.
   Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.

Exercice 23. Soit E un ev de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, On écrit $\chi_u(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_u(\lambda_i)} Q(X)$, avec Q un polynôme sans racines.

1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que vaut $Q(X)$?
   Si u est diagonalisable, que vaut $Q(X)$?
2. On pose $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$.
   Montrer que l'endomorphisme induit u_{F_i} est de la forme :
   $$u_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i} + n_i, \text{ avec } n_i \text{ nilpotent.}$$
3. On note $r(n_i)$ l'indice de nilpotence de n_i. Quel autre nombre entier est égal à $r(n_i)$?
4. On suppose que $Q(X) = 1$. Montrer alors que $u = d + m$, avec d endomorphisme diagonalisable et m endomorphisme nilpotent, $dm = md$, et d, m des polynômes en u. (On pourra commencer par trouver des polynômes en u qui conviennent.)

Exercice 24. (*) Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n.

1. On suppose qu'il existe un polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 et vérifiant $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$.
   Montrer que A est inversible et que A et B commutent.
2. Si A est nilpotente et qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $B = AP(A)$.
   Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$ et $A = BQ(B)$. (On pourra exprimer $B, B^2, \ldots$ en fonction de $A, A^2, \ldots$)

Exercice 25.
1. Soient E un ev de dim n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.
   Montrer que l'on a $\dim(Ker(u^k)) \geq k$, pour tout $1 \leq k \leq n$.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Soit $Spec(v) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.
   On suppose que pour un $1 \leq i \leq r$, on a $\dim(Ker(v - \lambda_i Id)) > 1$.
   Montrer que μ_v est un diviseur strict de χ_v.
3. Donner un exemple à 2) dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 26.
1. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A quel autre entier est égal $\dim(\mathbb{K}[B])$?
2. Pour $\lambda \in Spec(B)$, on écrit $\mu_B(X) = (X - \lambda)^k Q(X)$, avec $Q(\lambda) \neq 0$.
   A quel autre entier est égal $\dim(Ker((B - \lambda I_n)^k))$?
3. Peut-on avoir $\dim(Ker((B - \lambda I_n)^k)) > \dim(\mathbb{K}[B])$?
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1. Soit $n \geq \deg(P)$. Existe-t-il $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mu_A = P$?
   A-t-on le même résultat pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque ?

Exercice 27. Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AM = MB$, avec $M \neq O$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(B)$.
2. Montrer que A et B ont une valeur propre en commun.

Exercice 28. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant
$$f^4 = f^2.$$
On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f.
Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 29. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I = O$.
A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
Montrer que $\det(A) = 1$.

Exercice 30. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et u un endomorphisme sur E. On suppose qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux tels que $(PQ)(u) = 0$.
Montrer que l'on a
$$\operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Im} P(u) = E.$$
Indice : Bézout.

Exercice 31. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables, trigonalisables. Si oui, donner leur forme diagonale/triangulaire/de Dunford / de Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 32. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, avec $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{K}$ sur sa diagonale.

1. Montrer que A est trigonalisable.
2. Si $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n$, montrer que la décomposition de Dunford de A est $A = \gamma_1 I_n + (A - \gamma_1 I_n)$.
3. On suppose que les γ_i ne sont pas tous égaux. On suppose que A est diagonalisable.
   Quelle est la décomposition de Dunford de A ?
   Donner un exemple.
4. On suppose que les γ_i ne sont pas tous égaux.
   Donner un exemple de matrice A, non diagonalisable, où la décomposition de Dunford de A n'est pas $A = Diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n) + (A - Diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Exercice 33. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est trigonalisable.

1. Montrer que ${}^tA$ est trigonalisable.
2. On suppose A inversible. Montrer que A^{-1} est trigonalisable.
3. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $Q(A)$ est trigonalisable.
   Calculer $\chi_{Q(A)}(X)$ en fonction des valeurs propres λ_i de A.
   Déterminer $Spec(Q(A))$.

Exercice 34. (*) Résoudre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ les EDL :

1. $y"(x) - 2y'(x) = -y(x)$
2. $y"(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4i$
3. $y"(x) + y(x) = 2x$
4. $y^{(n)}(x) = y(x)$

Exercice 35. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Est-elle trigonalisable ?
   Si oui, donner sa forme triangulaire supérieure et sa décomposition de Dunford.
2. Calculer A^n, pour tout $n \geq 0$.

Exercice 36. Trouver dans $\mathbb{C}$ les suites récurrentes linéaires solutions des équations suivantes :

1. $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
2. $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 1$
3. $u_{n+2} + u_n = 2n$
   Résoudre aussi cette équation dans $\mathbb{R}$
4. $u_{n+m} = u_n$

Exercice 37. Déterminer l'ensemble des nombres réels a tels que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Calculer $\det(A + I_n)$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AM = MA$.
   Calculer $\det(A + M)$. (On pourra commencer par le cas où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)
4. Le résultat est-il encore vrai si M ne commute pas avec A ?

Exercice 39. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ non-nuls et distincts.
On pose $M = Diag(J_1(0), J_2(0), J_3(\lambda_1), J_2(\lambda_2), J_2(\lambda_2))$, une matrice diagonale par blocs.
On rappelle que les $J_r(\lambda) = \lambda I_r + N_r$ sont des blocs de Jordan. On pose $(e_1, \ldots, e_{10})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{10}$.
• Déterminer χ_M.
• Déterminer μ_M.
• Pour chaque $\lambda \in Spec(M)$, déterminer $Ker(M - \lambda I_{10})$.
• On prend maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - \lambda)^2$ et celui de la div. eucl. par $(X - \lambda)^3$. (On pourra utiliser la formule de Taylor)
• Calculer $P(M)$ en fonction des matrices nilpotentes N_2, N_3 (matrices de taille 2 et de taille 3).

Exercice 40. On se place sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\langle P \mid Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\langle X^p \mid X^q \rangle$ pour tous $p, q \geq 0$.
3. Soient F le sous-ev des polynômes constants et G l'ensemble des polynômes P admettant 0 pour racine.
   Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.
4. Obtenir à partir de la famille $(1, X, X^2, X^3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 41. • Montrer que les matrices suivantes sont trigonalisables dans $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

• Calculer leur polynôme minimal, et déterminer leur forme de Jordan.
• Déterminer la décomposition de Dunford de B, $B = D + N$. Combien vaut l'indice de nilpotence de N ?
• Calculer B^m, pour tout $m \geq 0$.

Exercice 42. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On définit l'application linéaire $F : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ par $F(u) = f \circ u$.

1. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, F est diagonalisable.
   (On pourra regarder $P(F)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$)
2. Montrer que f et F ont le même polynôme minimal.
   En déduire que f et F ont les mêmes valeurs propres.
3. On suppose f diagonalisable. Soit λ une valeur propre de f.
   Etablir que $\dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \dim E_\lambda(f)$,
   puis que $\dim E_\lambda(F) = \dim E \times \dim E_\lambda(f)$.